

Hauptwettbewerb 2026

Lösungshinweise

Bewertungsvorschlag

Aufgabe 1 – Wankelmütig – 7 Punkte –

Donnerstags und freitags sagt der kleine Junge die Wahrheit.

An diesen beiden aufeinanderfolgenden Tagen muss seine Antwort auf die Frage nach seinem Namen also dieselbe sein.

Unter den im Aufgabentext aufgeführten Antworten gibt es aber keine zwei aufeinanderfolgenden identischen Antworten.

Daher gibt der kleine Junge entweder die letzte Antwort Elio an einem Donnerstag oder die erste Antwort Sacha an einem Freitag.

Der erste Fall (wahre Antwort Elio am Donnerstag) kann ausgeschlossen werden, denn in diesem Fall gibt der kleine Junge am Dienstag, zwei Tage vor dem Donnerstag, auch die Antwort Elio.

Dienstags lügt er aber, was zu einem Widerspruch führt.

Daher gibt der kleine Junge die erste Antwort Sacha an einem Freitag und sagt damit die Wahrheit.

Der kleine Junge heißt Sacha.

Bewertungsvorschlag:

1 Punkt für die richtige Lösung Sacha

3 Punkte für die Erklärung

3 Punkte für die sprachliche Qualität



Aufgabe 2 – Keine 9 – 5 Punkte –

Wenn man jede der vier Ziffern 1, 3, 5 und 7 genau einmal verwendet, kann man $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ vierstellige Zahlen schreiben.

An jeder Stelle (Tausender, Hunderter, Zehner, Einer) erscheint jede Ziffer dabei $24 : 4 = 6$ Mal.

Bei der Addition der 24 Zahlen kann man alle 24 Tausenderziffern addieren und sie mit 1000 multiplizieren, alle 24 Hunderterziffern addieren und sie mit 100 multiplizieren, alle 24 Zehnerziffern addieren und sie mit 10 multiplizieren und alle 24 Einerziffern addieren.

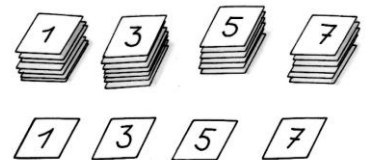
An jeder Stelle (Tausender, Hunderter, Zehner, Einer) ist die Summe der 24 Ziffern

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 6 \cdot 16 = 96.$$

Die Summe der 24 Zahlen ist also

$$96 \cdot 1000 + 96 \cdot 100 + 96 \cdot 10 + 96 \cdot 1 = 96 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 96 \cdot 1111 = 106\,656$$

Die Summe aller vierstelligen Zahlen, die man aufschreiben kann, wenn man jede der Ziffern 1, 3, 5 und 7 genau einmal verwendet, ist 106 656.



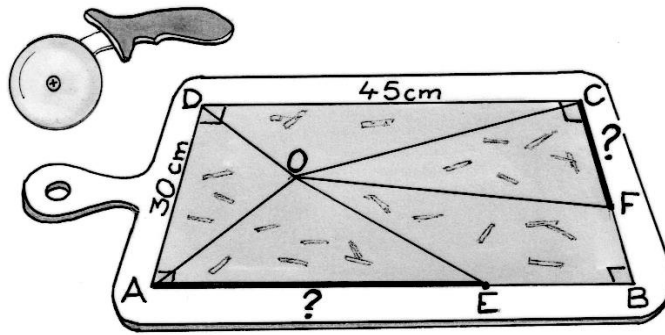
Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für die Lösung 106 656

3 Punkte für die Begründung

Bemerkung: Es wird akzeptiert, wenn alle 24 Zahlen aufgeschrieben und mit dem Taschenrechner addiert wurden.

Aufgabe 3 – Flammkuchen – 7 Punkte –



Die Fläche des gesamten Rechtecks beträgt $45 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 1\,350 \text{ cm}^2$.

Die Fläche jedes Teilstücks beträgt also $1\,350 \text{ cm}^2 : 5 = 270 \text{ cm}^2$.

Im Dreieck DAO sei h_1 die Höhe über der Strecke DA (ausgehend vom Punkt O). Es gilt

$$\frac{30 \cdot h_1}{2} = 270$$

und $h_1 = 18 \text{ [cm]}$.

Im Dreieck OFC beträgt die Höhe h_2 über der Strecke FC (ausgehend von O) damit $45 - 18 = 27 \text{ [cm]}$.

Es gilt

$$\frac{\overline{CF} \cdot h_2}{2} = \frac{\overline{CF} \cdot 27}{2} = 270$$

und $\overline{CF} = 20 \text{ [cm]}$.

Im Dreieck DOC, sei h_3 die Höhe über der Strecke DC (ausgehend von O). Es gilt

$$\frac{45 \cdot h_3}{2} = 270$$

und $h_3 = 12 \text{ [cm]}$.

Im Dreieck AEO beträgt die Höhe h_4 über der Strecke AE (ausgehend von O) damit $30 - 12 = 18 \text{ [cm]}$.

Es gilt

$$\frac{\overline{AE} \cdot h_4}{2} = \frac{\overline{AE} \cdot 18}{2} = 270$$

$\overline{AE} = 30 \text{ [cm]}$.

Die Länge der Strecke AE beträgt 30 cm, die Länge der Strecke CF beträgt 20 cm.

Bewertungsvorschlag:

1,5 Punkte für die Länge der Strecke AE

2 Punkte für die Begründung

1,5 Punkte für die Länge der Strecke CF

2 Punkte für die Begründung

Aufgabe 4 – Wasser marsch! – 5 Punkte –

Wir benennen die Wassermengen in den einzelnen Behältern vor dem Öffnen der jeweiligen Schleusen wie in der Abbildung rechts.

f ist 8 plus die Hälfte von 88, also **f = 52**.

h ist 52 plus die Hälfte von 66, also **h = 85**.

In den Behälter mit der Wassermenge 66 ist die Hälfte von **c** und die Hälfte von 88 geflossen.

-> $66 = \frac{c}{2} + 44$, also $\frac{c}{2} = 22$ und **c = 44**.

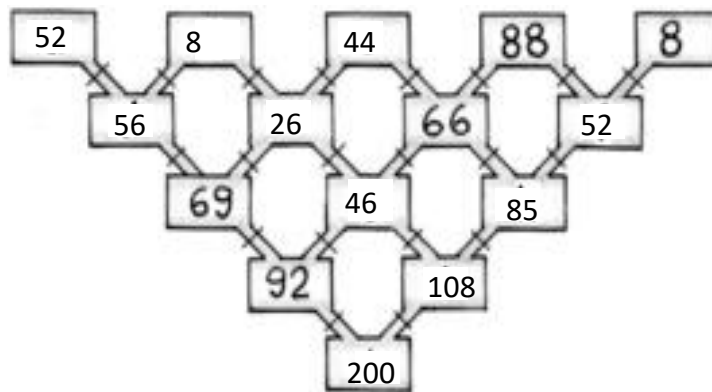
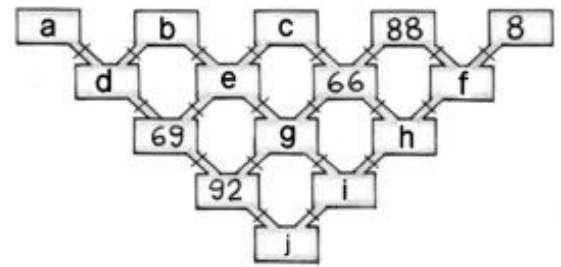
In den Behälter mit der Wassermenge 92 ist die Hälfte von **g** und 69 geflossen.

-> $92 = \frac{g}{2} + 69$, also $\frac{g}{2} = 23$ und **g = 46**.

In den Behälter mit der Wassermenge **g** = 46 ist die Hälfte von **e** und die Hälfte von 66 geflossen.

-> $46 = \frac{e}{2} + 33$, also $\frac{e}{2} = 13$ und **e = 26**.

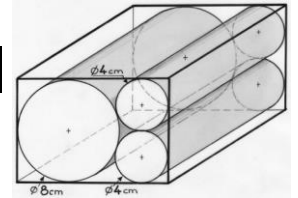
Wenn man auf dieselbe Art fortfährt, erhält man folgende Lösung:



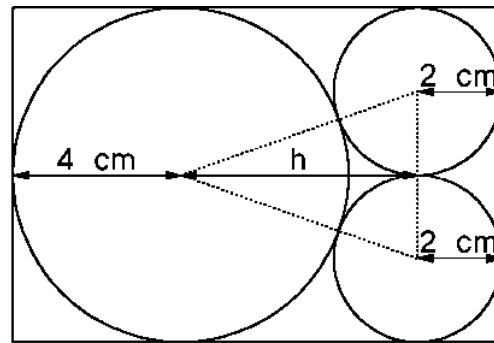
Bewertungsvorschlag:

0,5 Punkte für jede der 10 zu bestimmenden Wassermengen
Die Berechnung/ Begründung ist nicht verlangt.

Aufgabe 5 – In die Röhren gucken – 7 Punkte –



Vorderansicht der Schachtel:



Die **Höhe der Schachtel** ist der Durchmesser der großen Röhre: 8 cm.

Die **Tiefe der Schachtel** ist die Länge der Röhren: 10 cm.

Breite der Schachtel

Wir verbinden die Mittelpunkte der drei Grundkreise der Röhren zu einem Dreieck.

Es ist gleichschenkelig. Die Länge der Basis beträgt 4 cm (zwei Mal der Radius der kleinen Kreise), und die Länge der Schenkel beträgt 6 cm (Summe der Radien 4 cm und 2 cm).

Höhe h des Dreiecks mit Pythagoras:

$$h = \sqrt{6^2 - 2^2} \text{ cm} = \sqrt{32} \text{ cm} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \approx 5,66 \text{ cm}$$

Die Breite der Schachtel beträgt $4 \text{ cm} + h + 2 \text{ cm} \approx 11,66 \text{ cm}$ (siehe Skizze der Vorderansicht)

Die Breite der Schachtel beträgt gerundet 11,66 cm, die Tiefe der Schachtel beträgt 10 cm, und die Höhe der Schachtel beträgt 8 cm.

Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für die Zeichnung

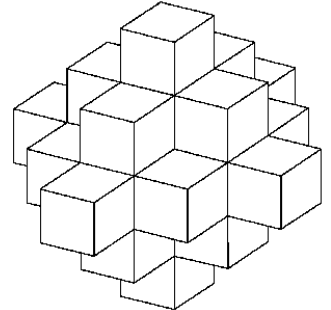
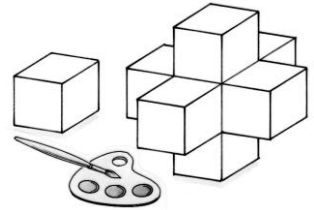
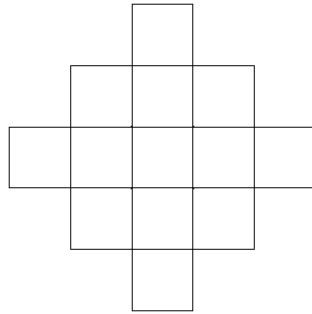
1 Punkt für die Höhe der Schachtel (8 cm)

0,5 Punkte für die Tiefe der Schachtel (10 cm)

3,5 Punkte für die Breite der Schachtel mit Berechnung

Aufgabe 6 – Gelb – blau – rot – 5 Punkte –

Vorderansicht des Körpers :



Der Körper, den wir am Ende erhalten, hat fünf Etagen.

- Die erste und die fünfte Etage bestehen jeweils aus einem roten Würfel.
- Die zweite und die vierte Etage bestehen jeweils aus vier roten Würfeln (und einem blauen Würfel).
- Die dritte Etage besteht aus acht roten Würfeln (sowie vier blauen und einem gelben).

Es wurden $1 + 1 + 4 + 4 + 8 = 18$ rote Würfel aufgeklebt.

Die Vorderansicht des Körpers hat 13 rote Seitenflächen vom Flächeninhalt 1 cm^2 .

Der Körper hat insgesamt $6 \cdot 13 = 78$ Seitenflächen vom Flächeninhalt 1 cm^2 .

Es wurden 18 rote Würfel aufgeklebt.

Der Körper hat insgesamt 78 Seitenflächen.

Bewertungsvorschlag:

1 Punkt für die Vorderansicht

2 Punkte für die Anzahl der roten Würfel (18)

2 Punkte für die Anzahl der Seitenflächen (78)

Aufgabe 7 – Pack die Badehose ein – 7 Punkte –

Nach einer halben Stunde, als Patricks Vater losfährt, hat Patrick bereits $0,5 \cdot 12 \text{ km} = 6 \text{ km}$ zurückgelegt.

Sei t die Zeit in Minuten nach der Abfahrt des Vaters.

Der Vater fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h , also 1 km/min .

Zurückgelegte Strecke des Vaters nach seiner Abfahrt: t [in km]

Der Sohn fährt mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h , also $\frac{1}{5} \text{ km/min}$.

Zurückgelegte Strecke des Sohnes nach der Abfahrt des Vaters: $6 + \frac{1}{5} t$ [in km]

Der Vater holt den Sohn ein, wenn beide dieselbe Strecke zurückgelegt haben:

$$t = 6 + \frac{1}{5} t \quad \rightarrow \quad \frac{4}{5} t = 6 \quad \rightarrow \quad t = 7,5 \text{ [min]}$$

Patrick hat bereits 6 km zurückgelegt, als sein Vater losfährt.

Der Vater braucht 7,5 Minuten, um seinen Sohn einzuholen.



Bewertungsvorschlag:

1 Punkt für die Strecke, die Patrick bereits zurückgelegt hat (6 km)

2 Punkte für die Zeit, die der Vater braucht, um ihn einzuholen (7,5 min)

4 Punkte für die Begründung

Volle Punktzahl für eine Lösung, die durch Probieren gefunden wurde und gut dokumentiert ist

Aufgabe 8 – Selbstbezogen – 5 Punkte –



Die einzigen beiden vierstelligen Zahlen mit den aufgeführten Eigenschaften sind 2020 und 1210.

Begründung (nicht verlangt)

Die Zahl kann nur Ziffern von 0 - 3 enthalten. Denn wenn eine Ziffer 4 wäre, würde das laut Aufgabentext bedeuten, dass die Zahl 0000, 1111, 2222 oder 3333 wäre. Keine dieser Zahlen enthält aber die Ziffer 4. Größere Ziffern als 4 können nicht auftreten, weil die gesuchte Zahl nur 4 Stellen hat.

Fallunterscheidung für die Ziffer a

- **a = 3** bedeutet 3 Ziffern 0 in der Zahl, also **b = c = d = 0**. Aber **d** kann nicht 0 sein, weil die Zahl ja wegen **a = 3** eine Ziffer 3 enthält. -> **a = 3** ist also nicht möglich.

Mit ähnlichen Begründungen kann man zeigen, dass auch **b**, **c**, und **d** nicht 3 sein können.

-> **Die gesuchte Zahl enthält nur Ziffern von 0 - 2.**

- **a = 2** bedeutet 2 Ziffern 0 und $c \geq 1$. Also **b = d = 0**.
b = 0 bedeutet keine Ziffer 1 in der Zahl => **c = 2**. **Erste Lösung: 2020.**
- **a = 1** bedeutet eine Ziffer 0 in der Zahl. Da die Zahl keine Ziffer 3 enthält, ist **d = 0**.
Da **a = 1** gilt, ist **b** ≥ 1 . Wäre **b** auch 1, würde die Zahl dann zwei Ziffern 1 enthalten -> Widerspruch.
Also muss **b = 2** sein, und die Zahl muss noch eine weitere Ziffer 1 enthalten => **c = 1**.

Zweite Lösung: 1210

- **a = 0** ist nicht möglich, denn das würde ja bedeuten, dass die Zahl keine Null enthält.

Bewertungsvorschlag:

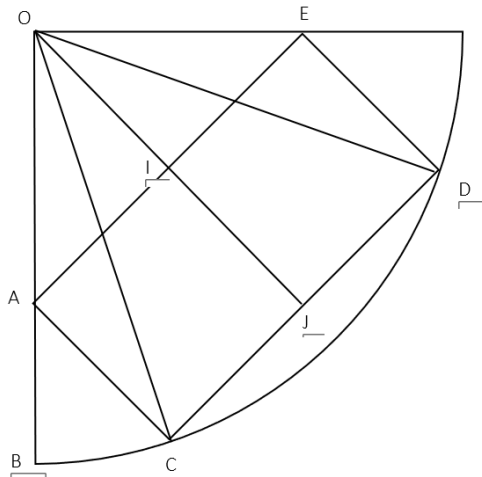
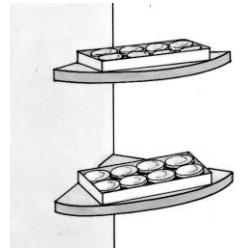
3 Punkte für eine korrekte Lösung

dabei 1 Punkt Abzug für eine oder mehrere falsche Lösungen

5 Punkte, wenn beide Lösungen gefunden wurden

dabei 2 Punkte Abzug für eine oder mehrere falsche Lösungen

Aufgabe 9 – Patisserie – 7 Punkte –



Wenn die vier Eckpunkte der Schachtel-Grundfläche genau auf dem Rand des Tablett's liegen, dann liegt die Schachtel symmetrisch zur Winkelhalbierenden des rechten Winkels im Viertelkreis (in der Zeichnung die Gerade durch O, I und J). Das rechtwinklige Dreieck OAE ist damit gleichschenkelig.

Der Winkel IOA beträgt 45° , und der Winkel AIO ist ein rechter Winkel. Daher beträgt im Dreieck AIO der Winkel bei A auch 45° , und das Dreieck AIO ist gleichschenkelig.

I ist der Mittelpunkt der Strecke AE.

Da das Dreieck AIO gleichschenkelig ist, gilt $\overline{OI} = \overline{AI} = 10,5 \text{ [cm]}$.

Außerdem gilt $\overline{OJ} = \overline{OI} + 11 = 10,5 + 11 = 21,5 \text{ [cm]}$

Der Winkel bei J ist ein rechter Winkel, daher gilt mit Pythagoras $\overline{OC}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{JC}^2 = 21,5^2 + 10,5^2$

$$\overline{OC} = \sqrt{572,5} \approx 23,93 \text{ [cm]}$$

Der Radius des Viertelkreises beträgt ungefähr 23,93 cm.

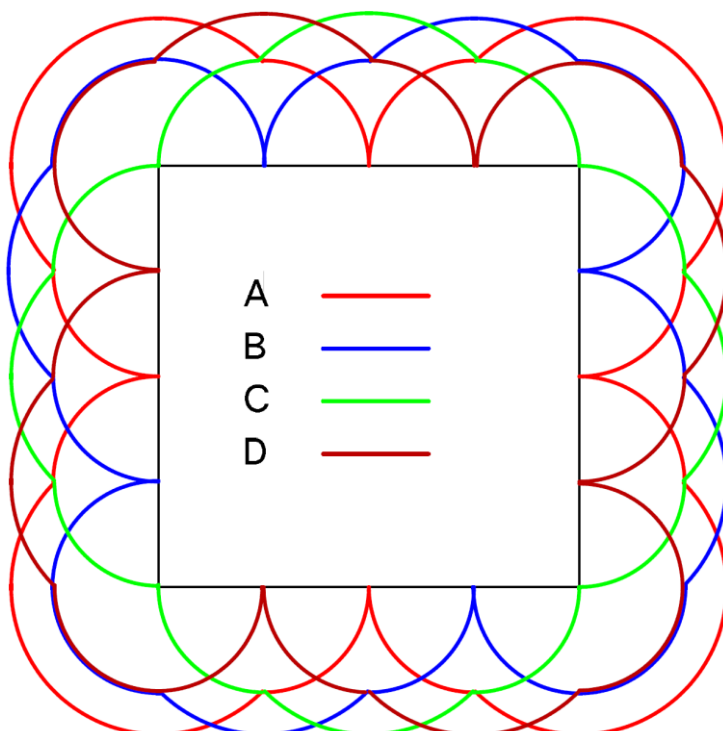
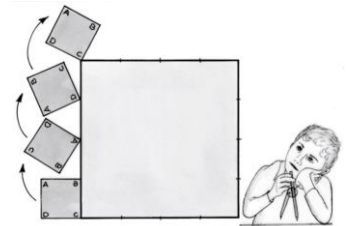
Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für den Radius

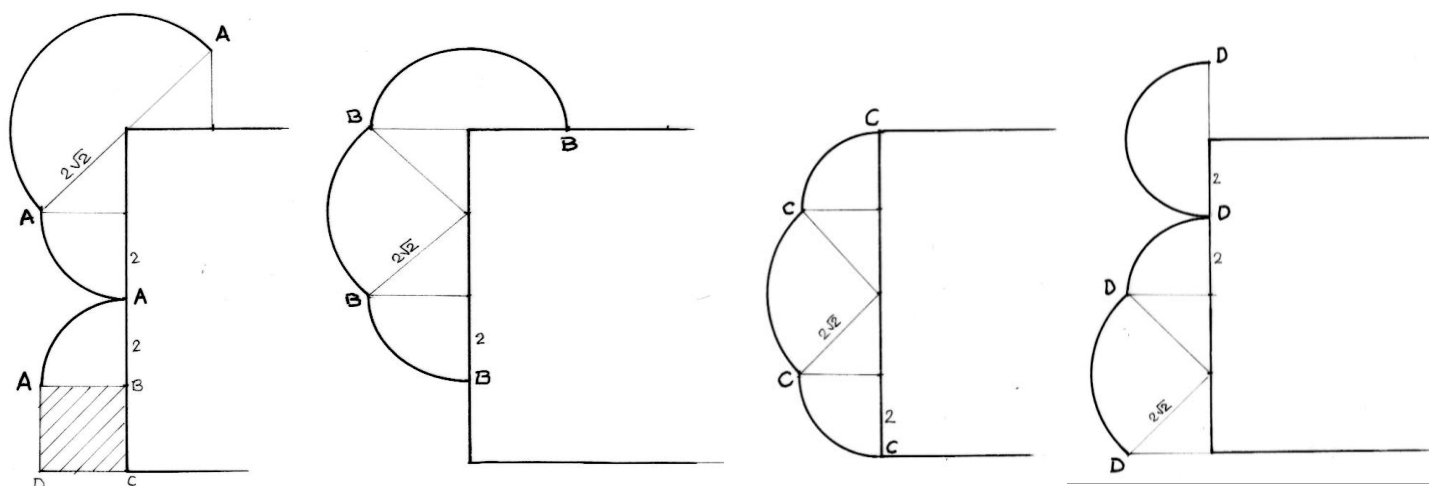
5 Punkte für die Berechnung mit Erklärung

Aufgabe 10 – Quadratwalzer – 10 Punkte –

Die Bahnen der vier Eckpunkte



Vergleich der Bahnen der vier Eckpunkte



Die Bahn jedes Punktes enthält acht Viertelkreisbögen vom Radius 2 cm und einen Viertelkreisbogen vom Radius $r = \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ cm} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Die Bahn von **Punkt A** enthält außerdem vier Viertelkreisbögen vom Radius $2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Die Bahn von **Punkt B** enthält außerdem vier Viertelkreisbögen vom Radius 2 cm.

Die Bahn von **Punkt C** enthält nur die oben aufgeführten Kreisbogenanteile.

Die Bahn von **Punkt D** enthält außerdem vier Viertelkreisbögen vom Radius 2 cm.

-> Der **Punkt C** legt die kürzeste Bahn zurück.

Berechnung der Länge der Bahn von Punkt C

$$8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi(2 + \sqrt{2}) \approx 42,9 \text{ [cm]}$$

Die Bahn von Punkt C ist mit etwa 42,9 cm die kürzeste.

Bewertungsvorschlag:

4 Punkte für die Zeichnung (1 Punkt pro Bahn)

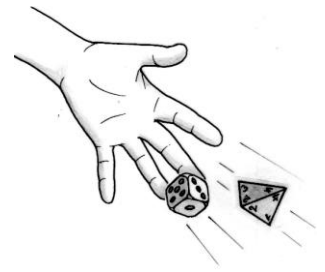
1 Punkt für die Antwort, dass der Punkt C die kürzeste Bahn zurücklegt

3 Punkte für die Begründung

Eine Begründung über die Berechnung aller 4 Bahnlängen wird akzeptiert.

2 Punkte für die Berechnung der Länge der Bahn von Punkt C

Aufgabe 11 – Wer hat Recht? – 5 Punkte –



Für die Augensummen 5 und 6 gibt es jeweils vier Möglichkeiten, für die Augensumme 9 zwei (siehe Auflistung unten).
Alle Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. -> **Beide haben Recht.**

Summe 5	
Sechseckiger Würfel	Vierseitiger Würfel
1	4
2	3
3	2
4	1

Summe 9	
Sechseckiger Würfel	Vierseitiger Würfel
5	4
6	3

Summe 6	
Sechseckiger Würfel	Vierseitiger Würfel
2	4
3	3
4	2
5	1

Bewertungsvorschlag:

2 Punkte, wenn nur begründet wurde, dass Michaël Recht hat
2 Punkte, wenn nur begründet wurde, dass Stéphanie Recht hat
5 Punkte, wenn begründet wurde, dass beide Recht haben



Aufgabe 12 – KAPREKAR – 7 Punkte –

Beispiele: 3 ; 4 ; 5 $543 - 345 = 198$ 0 ; 2 ; 9 $920 - 029 = 891$
 $981 - 189 = 792$ $981 - 189 = 792$
 $972 - 279 = 693$ $972 - 279 = 693$
 $963 - 369 = 594$ $963 - 369 = 594$
 $954 - 459 = 495$ $954 - 459 = 495$

7 ; 8 ; 1 $871 - 178 = 693$
 $963 - 369 = 594$
 $954 - 459 = 495$

-> **Unabhängig von der Wahl der Ausgangsziffern erhält man spätestens nach fünf Durchgängen bei jedem weiteren Durchgang die Zahl 495.** (die sogenannte Kaprekar- Konstante)

-> **Kaprekar nennt seinen Freunden die Zahl 495.**

Seien a, b und c drei verschiedene Ziffern mit $a < b < c$.

Größtmögliche Zahl mit diesen Ziffern: $100c + 10b + a$.

Kleinstmögliche Zahl mit diesen Ziffern: $100a + 10b + c$.

Differenz: $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99(c - a)$ -> **Diese Differenz ist ein Vielfaches von 99.**

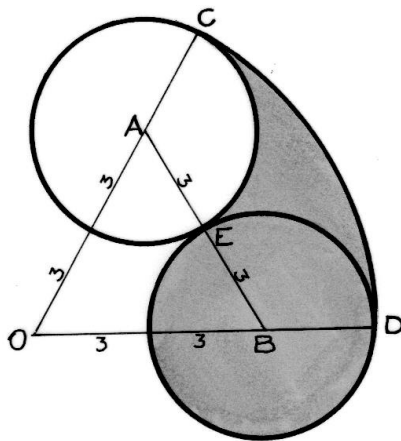
Bemerkung (nicht verlangt): Für den Beweis, dass der Algorithmus tatsächlich immer auf die Zahl 495 führt, genügt es also, diese Behauptung für alle maximal dreistelligen Vielfachen von 99 nachzuweisen. (also 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990)

Tatsächlich führt der Algorithmus bei diesen Zahlen immer auf die Zahl 495.

Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für die Beispiele (mindestens zwei)
2 Punkte für die Zahl, die Kaprekar nennt: 495
3 Punkte für den Beweis, dass alle Ergebnisse Vielfache von 99 sind

Aufgabe 13 – Tropfen – 10 Punkte



Hier eine mögliche Lösung:

Die graue Figur besteht aus einem Kreis mit Radius 3 cm und einer Teilfigur, die von drei Kreisbögen begrenzt wird – zwei Kreisbögen um A und B vom Radius 3 cm und einem Kreisbogen um O mit Radius 9 cm.

Der Kreis um B mit Radius 3 cm hat den Flächeninhalt $\pi \cdot (3\text{ cm})^2 = 9\pi\text{ cm}^2$

Der Flächeninhalt der zweiten Teilfigur, die von den drei Kreisbögen begrenzt wird, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Man berechnet den Flächeninhalt des Kreisausschnitts ODC und zieht davon den Flächeninhalt des Dreiecks OBA sowie den Flächeninhalt der beiden Kreisausschnitte AEC und BDE ab.

Flächeninhalt des Kreisausschnitts ODC mit dem Öffnungswinkel 60° :

$$\frac{\pi \cdot (9\text{ cm})^2}{6} = \frac{27\pi}{2}\text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks OBA:

$$\frac{6\text{ cm} \cdot \sqrt{(6\text{ cm})^2 - (3\text{ cm})^2}}{2} = 9\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der Kreisausschnitte AEC und BDE (Öffnungswinkel jeweils $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$):

$$\frac{\pi \cdot (3\text{ cm})^2}{3} = 3\pi\text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der zweiten Teilfigur:

$$\frac{27\pi}{2}\text{ cm}^2 - 9\sqrt{3}\text{ cm}^2 - 2 \cdot 3\pi\text{ cm}^2 = \frac{15\pi}{2}\text{ cm}^2 - 9\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der grauen Figur:

$$9\pi\text{ cm}^2 + \frac{15\pi}{2}\text{ cm}^2 - 9\sqrt{3}\text{ cm}^2 = \frac{33\pi}{2}\text{ cm}^2 - 9\sqrt{3}\text{ cm}^2 \approx 36,25\text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt der grauen Figur beträgt $\frac{33\pi}{2}\text{ cm}^2 - 9\sqrt{3}\text{ cm}^2 \approx 36,248\text{ cm}^2$.

Bewertungsvorschlag:

Im Ermessen des Korrektors/ der Korrektorin
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze